歸納與演繹

林延輯

台灣師範大學數學系

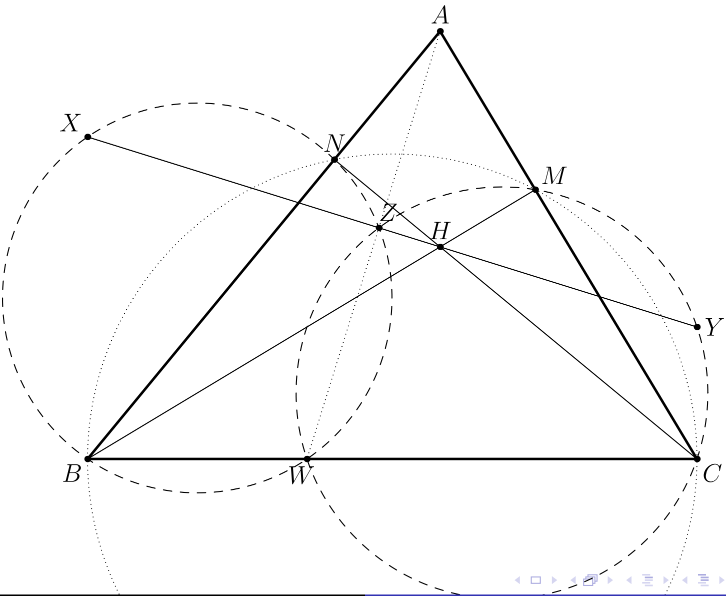
2013 年 9 月 12 日

演講大綱

1. 數學科展的題材
2. 猜測與命題
3. 歸納與證明的差別
4. 分析的整理與結果的呈現

數學科展的題材

1. 數論
2. 古典幾何
3. 數學 (繪圖) 軟體實驗
4. 趣味問題 / 遊戲
5. 延續性研究


A
X
N
M
Z
H
Y
B
W
C

趣味問題 / 遊戲

1. 拈 (Nim)
2. 曼卡拉 (Mancala)
3. 西洋棋 (Chess)
4. Mastermind (1A2B)
5. 撲克牌 (Poker)

延續性研究

「在 xx 屆國中科展中，zzz 學長討論 2 個車的情形。現在我們討論 3 個車的情形 ...」

「aaa 證明了對三角形是成立的。我們現在換成四邊形 ...」

猜測與命題

在一個拈 (Nim) 的遊戲中，兩人輪流自三堆石頭中拿取石頭，每回只能從其中一堆拿取若干顆；約定拿到最後一顆石頭者獲勝。問三堆石頭的數量為何時，先手有必勝策略？

例：$(3,5,7)$, $(2,5,7)$?

猜測與命題

在一個拈 (Nim) 的遊戲中，兩人輪流自三堆石頭中拿取石頭，每回只能從其中一堆拿取若干顆；約定拿到最後一顆石頭者獲勝。問三堆石頭的數量為何時，先手有必勝策略？

例：$(3,5,7)$, $(2,5,7)$?

一般規則？

猜測與命題

在一個拈 (Nim) 的遊戲中，兩人輪流自三堆石頭中拿取石頭，每回只能從其中一堆拿取若干顆；約定拿到最後一顆石頭者獲勝。問三堆石頭的數量為何時，先手有必勝策略？

例：$(3,5,7)$, $(2,5,7)$?

一般規則？例如：$(2, 4k+1, 4k+3)$?

猜測與命題

Example

觀察費氏數列：$F_1 = 1, F_2 = 1; n \geqslant 2$ 時，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$
$$34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

猜測與命題

Example

觀察費氏數列：$F_1 = 1, F_2 = 1; n \geqslant 2$ 時，
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$
$$34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

猜測：F_{4k} 都是 3 的倍數。

猜測與命題

Example

觀察費氏數列：$F_1 = 1, F_2 = 1; n \geqslant 2$ 時，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$
$$34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

猜測：F_{4k} 都是 3 的倍數。

歸納

數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0 = 1, a_1 = 1$;
$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, n \geqslant 2.$

$$1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, \ldots$$

歸納

數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0 = 1, a_1 = 1;$
$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, n \geqslant 2.$

$$1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, \ldots$$

數列 $\{b_n\}$ 滿足 $b_0 = 1; b_n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a_k a_{n-k}$:

$$1, 2, 6, 20, 76, 312, 1384, 6512, \ldots$$

問: $\{b_n\}$ 的公式？

歸納

數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_0 = 1, a_1 = 1;$
$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, n \geqslant 2.$

$$1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, \ldots$$

數列 $\{b_n\}$ 滿足 $b_0 = 1; b_n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a_k a_{n-k}$:

$$1, 2, 6, 20, 76, 312, 1384, 6512, \ldots$$

問: $\{b_n\}$ 的公式？(猜測：$b_n = 2(b_{n-1} + (n-1)b_{n-2})$)

歸納與證明的差別

歸納 觀察很多很多的例子，發現其中共同的規律

證明 由定義、已知、定理、公式一步步推導

歸納與證明的差別

歸納 觀察很多很多的例子，發現其中共同的規律

證明 由定義、已知、定理、公式一步步推導

常常有舉了很多例子後就宣稱證明完畢的情形！

例如：費馬質數 $2^{2^n}+1$, 費馬最後定理, 遊戲實驗結果，GSP / GeoGebra (動態) 幾何圖形

分析的整理與結果的呈現

- 式子的推演與整理
- 數據與圖表的呈現
- 凸顯定理與結論

式子的推演與整理

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$$
$$\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$$
$$\sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

式子的推演與整理

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$$
$$\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$$
$$\sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

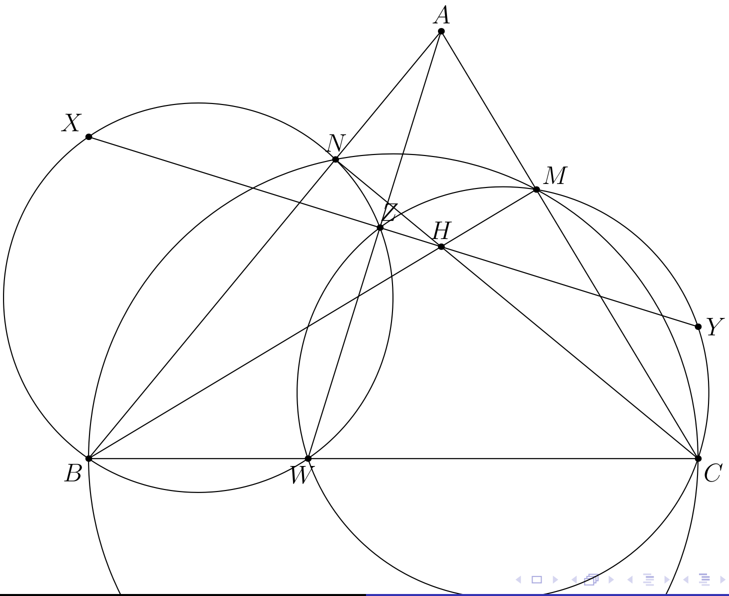
$$\begin{aligned}\sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= (1 - \cos^2 x)^2 \\ &= 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\end{aligned}$$

式子的推演與整理: 錯誤示例

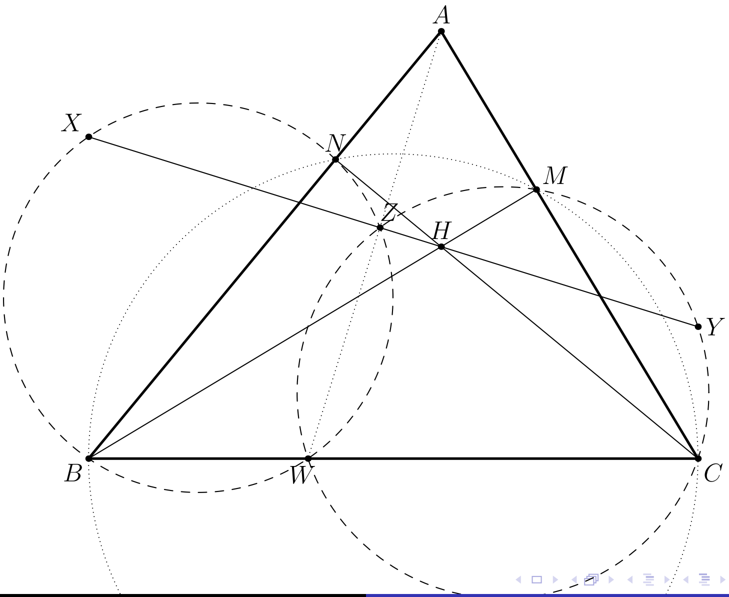
$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 8x + 6 \\
= {} & 2(x-1)(x-3) \\
= {} & (x-1)(x-3) = 0
\end{aligned}
$$

所以 $x = 1, 3.$

圖表與數據的呈現



圖表與數據的呈現



圖表與數據的呈現

2-rowed

N	Total	Y^0	Y^1	Y^2	Y^3	Y^4
X^0	1	1				
X^1	2	1	1			
X^2	4	2	1	1		
X^3	8	3	3	1	1	
X^4	16	6	4	4	1	1
X^5	32	10	10	5	5	1
X^6	64	20	15	15	6	6
X^7	128	35	35	21	21	7
X^8	256	70	56	56	28	28
X^9	512	126	126	84	84	36
X^10	1024	252	210	210	120	120
X^11	2048	462	462	330	330	165
X^12	4096	924	792	792	495	495
X^13	8192	1716	1716	1287	1287	715
X^14	16384	3432	3003	3003	2002	2002
X^15	32768	6435	6435	5005	5005	3003

凸顯定理與結論

$\boxed{\text{定理：當 } a > 1.45 \text{ 時，} y = a^x \text{ 與 } y = \log_a x \text{ 不相交。}}$

證明：...

在三堆的拈的遊戲中：

$(2,4,6)$	後手勝	$(2,8,10)$	後手勝
$(2,5,7)$	後手勝	$(2,9,11)$	後手勝
$(2,6,8)$	先手勝	$(2,10,12)$	先手勝
$(2,7,9)$	先手勝	$(2,11,13)$	先手勝
$\cdots$		$\cdots$	

凸顯定理與結論

在三堆的拈的遊戲中：

$(2,4,6)$	後手勝	$(2,8,10)$	後手勝
$(2,5,7)$	後手勝	$(2,9,11)$	後手勝
$(2,6,8)$	先手勝	$(2,10,12)$	先手勝
$(2,7,9)$	先手勝	$(2,11,13)$	先手勝
$\cdots$		$\cdots$	

結論 1. 在 $(2,4k+2,4k+4)$ 與 $(2,4k+3,4k+5)$ 的情形下，先手勝。

凸顯定理與結論

在三堆的拈的遊戲中：

$(2,4,6)$	後手勝	$(2,8,10)$	後手勝
$(2,5,7)$	後手勝	$(2,9,11)$	後手勝
$(2,6,8)$	先手勝	$(2,10,12)$	先手勝
$(2,7,9)$	先手勝	$(2,11,13)$	先手勝
$\cdots$		$\cdots$	

結論 1. 在 $(2,4k+2,4k+4)$ 與 $(2,4k+3,4k+5)$ 的情形下，先手勝。

其他注意事項

- 科展報告的格式：
  摘要、研究動機、研究目的、研究設備及器材、研究設計、研究方法和過程、結論、參考資料

其他注意事項

- 科展報告的格式：
  摘要、研究動機、研究目的、研究設備及器材、研究設計、研究方法和過程、結論、參考資料
- 數學科展報告的格式：
  摘要、關鍵字、研究動機與目的、文獻探討、(研究方法和過程)、研究成果、結論與展望、參考資料

其他注意事項

- 科展報告的格式：
摘要、研究動機、研究目的、研究設備及器材、研究設計、研究方法和過程、結論、參考資料
- 數學科展報告的格式：
摘要、關鍵字、研究動機與目的、文獻探討、(研究方法和過程)、研究成果、結論與展望、參考資料
- 書面報告與現場口頭報告

謝謝大家！

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：
  1. $n = N_0$ 成立。

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：
  1. $n = N_0$ 成立。
  2. $n < N_0$ 均不成立。

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：
  1. $n = N_0$ 成立。
  2. $n < N_0$ 均不成立。
- 命題與逆命題；充分條件與必要條件

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：
  1. $n = N_0$ 成立。
  2. $n < N_0$ 均不成立。
- 命題與逆命題；充分條件與必要條件
- 證明的細緻度

一些常見的問題

- 要證明 N_0 是正整數 n 的最小可能值，需要：
  1. $n = N_0$ 成立。
  2. $n < N_0$ 均不成立。
- 命題與逆命題；充分條件與必要條件
- 證明的細緻度
- 科展應容許失敗的嘗試